Operatory w przestrzeniach L_p
Lista 5 (nierówności Clarksona)

Zad 1. Niech (Ω, Σ, μ) przestrzeń z miarą nietrywialną, tzn. istnieje zbiór $A \in \Sigma$, $0 < \mu(A) < \infty$. Niech $p \geq 1$. Pokazać, że tożsamość równoległoboku

$$\|\xi + \eta\|_p^2 + \|\xi - \eta\|_p^2 = 2\left(\|\xi\|_p^2 + \|\eta\|_p^2\right)$$

zachodzi dla dowolnych $\xi, \eta \in L_p(\mu)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

Hint: Patrz Przykład 2.18 w https://math.uwb.edu.pl/ zaf/kwasniewski/pdf/skrypt.pdf

Zad 2. Niech $p > 2$ oraz $a, b \geq 0$. Pokazać, że $a^p + b^p \leq (a^2 + b^2)^{\frac{p}{2}}$. Przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a \cdot b = 0$.

Hint: Jeśli $b \neq 0$, to kładąc $t = \frac{a}{b}$ wystarczy pokazać, że $t^p + 1 \leq (t^2 + 1)^{\frac{p}{2}}$ i nierówność jest ostra, gdy $t \neq 0$. W tym celu można wykorzystać rachunek różniczkowy.

Zad 3. Niech $p > 2$. Pokazać, że dla dowolnych $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zachodzi nierówność

$$|z_1|^p + |z_2|^p \leq \frac{1}{2}\left(|z_1 + z_2|^p + |z_1 - z_2|^p\right).$$

Przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $z_1 \cdot z_2 = 0$.

Hint: Zastosować Zadanie 2, równość $|z_1|^2 + |z_2|^2 = \frac{1}{2}\left(|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2\right)$ oraz ścisłą wypukłość funkcji $\varphi(t) = t^{\frac{p}{2}}$.

Zad 4. Wykazać,że dla $1 \leq p < 2$ zachodzą analogony Zadań 2, 3 z nierównościami odwrotnymi.

Zad 5. Wykazać, że dla dowolnej miary μ zachodzą nierówności Clarksona:

$$\|\xi + \eta\|_p^p + \|\xi - \eta\|_p^p \geq 2(\|\xi\|_p^p + \|\eta\|_p^p) \qquad \text{jeśli } 2 \leq p < \infty,$$
$$\|\xi + \eta\|_p^p + \|\xi - \eta\|_p^p \leq 2(\|\xi\|_p^p + \|\eta\|_p^p) \qquad \text{jeśli } 1 \leq p < 2.$$

Ponadto, jeśli $p \neq 2$, to równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\xi \cdot \eta = 0$ μ-prawie wszędzie.

Zad 6. Pokazać, że dla dowolnych dwóch miar μ i ν oraz $p \in [1, \infty) \setminus \{2\}$ każda izometria $T : L_p(\mu) \to L_p(\nu)$ zachowuje rozłączność, tzn. jeśli $\xi \cdot \nu = 0$ w $L_p(\mu)$, to $T(\xi) \cdot T(\nu) = 0$ w $L_p(\nu)$.

Zad 7. Niech (Ω, Σ, μ) przestrzeń z miarą i niech $[\Sigma]$ będzie σ-zupełną kratą Boole'a zbiorów mierzalnych utożsamianych ze sobą co do równości μ-prawie wszędzie ($[A] = [B]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu(A \triangle b) = 0$). *Regularną funkcją zbioru* na (Ω, Σ, μ) nazywamy σ-addytywny endomorfizm algebry $[\Sigma]$, tzn. „funkcję $\Phi : \Sigma \to \Sigma$ zdefiniowaną modulo zbiory miary zero" taką, że

1) $\Phi(\Omega \setminus A) = \Phi(\Omega) \setminus \Phi(A)$ dla $A \in \Sigma$,

2) $\Phi(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \Phi(A_n)$ dla wszystkich parami rozłącznych $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$,

3) $\mu(\Phi(A)) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu(A) = 0$, dla każdego $A \in \Sigma$.

Wykazać, że jeżeli μ jest miarą skończoną, to każda izometria $T : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ zadaje wzorem

$$\Phi([A]) := [\{\omega \in \Omega : (T1_A)(\omega) \neq 0\}], \qquad A \in \Sigma,$$

regularną funkcją zbioru.

Zad 8. Niech (Ω, Σ, μ) przestrzeń z miarą skończoną. Pokazać, że każda regularna funkcja zbioru $\Phi : [\Sigma] \to [\Sigma]$ definiuje operator ograniczony $T_\Phi : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$, $p \geq 1$, taki, że

$$T_\Phi(1_A) := 1_A, \qquad A \in \Sigma.$$

Pokazać, że jeżeli $\varphi : \Omega \to \Omega$ jest funkcją mierzalną nieosobliwą, tzn. taką że $\mu(\varphi^{-1}(A)) \iff \mu(A) = 0$, to $\Phi([A]) := [\varphi^{-1}(A)]$ definiuje regularną funkcję zbioru oraz $T_\Phi \xi = \xi \circ \varphi$ dla $\xi \in L_p(\mu)$.